

# Example of the mdugm fonts.

Paul Pichaureau

29 janvier 2006

## Résumé

The package mdugm consists of a full set of mathematical fonts, designed to be combined with urw garamond as the main text font.

This example is extracted from the excellent book *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, W. Appel, Paris, éd. H.& K., 1999.

## 1 Dérivation de la transformée de Fourier

On a la relation très importante entre T.F. et dérivation :

**Théorème 10.22** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction décroissant suffisamment vite pour que  $x \mapsto x^k f(x)$  soit également dans  $L^1(\mathbb{R})$  pour  $k = 0, \dots, n$ . Alors  $\tilde{f}$  est  $n$  fois dérivable et on a

$$\mathcal{F} \left( (-2i\pi x)^k f(x) \right) = \tilde{f}^{(k)}(\nu) \quad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Inversement, si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et si, de plus, les dérivées successives  $f^{(k)}$  sont intégrables pour  $k = 1, \dots, n$ , alors on a

$$\mathcal{F} \left( f^{(m)}(x) \right) = (2i\pi\nu)^m \tilde{f}(\nu) \quad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Notamment, on retiendra que :

$$\mathcal{F} \left( f'(x) \right) = 2i\pi\nu \tilde{f}(\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \left( -2i\pi x f(x) \right) = \frac{d}{d\nu} \tilde{f}(\nu).$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\nu \mapsto f(x)e^{-2i\pi\nu x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dérivée  $k$ -ième bornée en module par  $\left| (2\pi x)^k f(x) \right|$ , qui est intégrable. On applique alors le théorème de dérivation sous le signe somme, qui nous donne

$$\tilde{f}'(\nu) = \int \frac{d}{d\nu} \left[ f(x)e^{2i\pi\nu x} \right] dx = \int (-2i\pi x) f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

puis, par une récurrence immédiate, la première formule.

On rappelle que pour toute fonction intégrable  $\phi$ , on a

$$\int \phi(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \phi(x) dx.$$

Puisque  $f'$  est intégrable, on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(v) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f'(x) e^{-2i\pi vx} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \left[ f'(x) e^{-2i\pi vx} \right]_{-R}^R + \int_{-R}^R (2i\pi vx) f(x) e^{-2i\pi vx} dx \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $f$  est sommable *ainsi que sa dérivée*,  $f$  admet une limite nulle en  $\pm\infty$ . La formule précédente nous montre alors, en faisant tendre  $R$  vers l'infini, que

$$\int f'(x) e^{-2i\pi vx} dx = \int (-2i\pi vx) f(x) e^{-2i\pi vx} dx,$$

ce qui nous montre la deuxième formule pour  $k = 1$ . Une récurrence sur  $k$  permet de conclure.

Walter Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*